შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

22.04.2012/ მათ/ II/ 119

ამოცანა № 4

გვერდი № 1

$f(x+yf(x)) = f(f(x)) + xf(y)$

ჩავსვათ x-ის ნაცვლად 0 და მივიღებთ $f(0+yf(0)) = f(f(0)) + 0\cdot f(y)$

$f(y f(0)) = f(f(0))$

ანუ $\forall x \in R$-ისთვის $\underline{f(x\cdot f(0)) = f(f(0))}$ (1)

ჩავსვათ x-ის ნაცვლად 0. მივიღებთ: $f(0) = f(f(0))$. ე.ი.

$\underline{f(x \cdot f(0)) = f(0)}$. (2).

შევნიშნოთ, რომ მოცემულ ტოლობაში $f(x+y\cancel{\cdot}f(x)) = f(f(x)) + x\cdot f(y)$ ჩავსვათ ნულოვანი ფუნქცია $f(x)=0$. მივიღებთ $0 = 0 + x\cdot 0$ ანუ $0=0$. ე.ი. $\boxed{f(x)=0}$ ერთ-ერთი ამონახსნია. სხვა არც ერთი მუდმივი ფუნქცია მოცემულ ტოლობას არ აკმაყოფილებს. ვთქვათ $f(x)=t$ $t\in R$ მოცემულ ~~ტოლ~~ ტოლობაში ჩასმით მივიღებთ, რომ $t = t + x\cdot t$ ყველა $x \in R$. რაც არ არის სწორი.

ჩავსვათ მოცემულ ტოლობაში x და 0. ანუ განვიხილოთ შემთხვევა, როცა $y=0$; მაშინ გვექნება $f(x+0\cdot f(x)) = f(f(x)) + x\cdot f(0)$.

$f(x) = f(f(x)) + xf(0)$ (3)

$\cancel{f(f(x)) = f(x) - xf(0)}$ ~~(2)~~

$x\cdot f(0) = f(x) - f(f(x))$. (4)

ჩავსვათ (4) (1)-ში. $f(x\cdot f(0)) = f(f(x\cdot f(0))) + x\cdot f(0) f(0)$.

(2)-ის გათვალისწინებით. $f(x\cdot f(0)) = f(0)$. ე.ი.

$f(0) = f(f(0)) + x\cdot f(0)\cdot f(0)$.

რადგან $f(0) = f(f(0))$. ე.ი. $\cancel{f(0)} = \cancel{f(0)} + x\cdot f(0) f(0)$.

ე.ი. $x\cdot f(0)\cdot f(0) = 0$ ე.ი. $\boxed{f(0)=0}$ ჩავსვათ (3)-ში.

$f(x) = f(f(x)) + x\cdot f(0)$ ანუ $f(x) = f(f(x)) + 0 \Rightarrow$

$f(x) = f(f(x))$ როცა $x = f(x)$, $f(f(x)) = f(f(f(x)))$.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

22.04.2012/ მათ/ II/ 119

ამოცანა № 4

გვერდი № 2

ეს კი მხოლოდ ამ ფუნქციისთვის ხდება $f(x)=x$.
მართლაც $f(x+yf(x))=x+yx$ და
$$f(f(x))+x\cdot f(y)=x+yx.$$

პასუხი: $f(x)=x$ და $f(x)=0$.

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

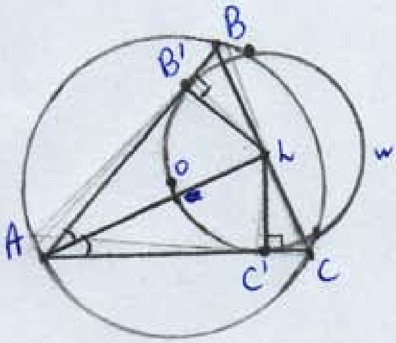
მაგიდა №

22.04.2012/ მათ/ II/ 119

ამოცანა № 5

გვერდი № 1

რადგან AB და AC ω წრეწირის მხებებია,
ე.ი. L მდებარეობს $\angle BAC$-ს ბისექტრისაზე.



$\angle B' = \angle C'$.

$\triangle AB'L = \triangle AC'L$

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი
SHOTA RUSTAVELI NATIONAL SCIENCE FOUNDATION

შოთა რუსთაველის ეროვნული სამეცნიერო ფონდი

შესარჩევი ტურები მათემატიკის 53-ე საერთაშორისო ოლიმპიადისათვის

მაგიდა №

22.04.2012/ მათ/ II/ 119

ამოცანა № 6

გვერდი № 1

შევნიშნოთ, რომ $a^2-2a+5\geq 4$. რაც ტოლფასი სამართლიანია: $a^2-2a+1=(a-1)^2\geq 0$.

განვიხილოთ სამი შემთხვევა: 1) $a=b=0$ $c=1$

2) $a=0$ $b\neq 0$ $c\neq 0$. ზოგადობის შეუზღუდავად $a\leq b$.

3) $a,b,c\neq 0$ ზოგადობის შეუზღუდავად $a\leq b\leq c$

1) $\frac{1}{0-0+5}+\frac{1}{0-0+5}+\frac{1}{1-2+5}=\frac{1}{5}+\frac{1}{5}+\frac{1}{4}=\frac{4+4+5}{20}=\frac{13}{20}$.

2) როცა $a=0$ $b=c=\frac{1}{2}$ მაშინ გამოსახულება $=\frac{1}{5}+\frac{8}{17}=\frac{57}{85}$

3) $a=b=c=\frac{1}{3}$ გამოსახულება $=\frac{27}{40}$

პ.: მაქსიმუმი $\frac{13}{20}$